แนวคิดเฉลยการบ้านครั้งที่ 6
รายวิชา 206331(คณิตศาสตร์ขั้นสูง)

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงบอกว่าปริพันธ์ต่อไปนี้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบหรือไม่ ถ้าเป็นจงบอกชนิดของปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้วย

   (ก) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+1}{(x-4)^3}\,dx$

   ตอบ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2+1}{(x-4)^3} = -\infty$ และ $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2+1}{(x-4)^3} = \infty$

   (ข) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+5}\,dx$

   ตอบ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^3+5} = -\infty$

   (ค) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+1}{\cos^2 x}\,dx$

   ตอบ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

   (ง) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\,dx$

   ตอบ เป็นปริพันธแท้ เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$

   (จ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

   ตอบ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

3. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

   วิธีทำ $\displaystyle\int \frac{x+e}{x-e}\,dx = \int (1+\frac{2e}{x-e})\,dx = x + 2eln|x-e| + C$

   เนื่องจาก $\displaystyle\frac{x+e}{x-e}$ มี $e \in [0,5]$ เป็นจุดเอกฐาน

   ดังนั้น $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

(ก) ในแบบปกติ

พิจารณา $\int_0^e \frac{x+e}{x-e}dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_0^{e-\varepsilon_1}\frac{x+e}{x-e}\,dx$

$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}[x+2eln|x-e|]_0^{e-\varepsilon_1}$

$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}(2e\ln\varepsilon_1-\varepsilon_1-e)$

$= -\infty$

เนื่องจาก $\int_0^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx = \int_0^e \frac{x+e}{x-e}\,dx + \int_e^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx$

$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_0^{e-\varepsilon_1}\frac{x+e}{x-e}\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{e+\varepsilon_2}^5\frac{x+e}{x-e}\,dx$

เพราะฉะนั้น $\int_0^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx$ ลู่ออก

(ข) ในแบบค่ามุขสำคัญโคชี

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x+e}{x-e} &= \int_0^e \frac{x+e}{x-e}\,dx + \int_e^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_0^{e-\varepsilon}\frac{x+e}{x-e}\,dx + \int_{e+\varepsilon}^5\frac{x+e}{x-e}\,dx\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left([x+2eln|x-e|]_0^{e-\varepsilon} + [x+2eln|x-e|]_{e+\varepsilon}^5\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(5-2e-2\varepsilon+2e\ln(5-e))\\
&= 5-2e+2e\ln(5-e)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^5 \frac{x+e}{x-e}\,dx$ ลู่เข้า

6. ให้ p เป็นค่าคงตัวและ $a>0$

จงพิสูจน์ว่า $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และลู่ออกเมื่อ $p\le 1$

วิธีทำ กรณีที่ $p=1$ จะได้ว่า

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln a) = \infty$$

กรณีที่ $p<1$ (นั้นคือ $-p+1<0$) จะได้ว่า

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-p+1}\left(\frac{1}{b^{-(-p+1)}}\right) = 0$$

กรณีที่ $p>1$ (นั้นคือ $-p+1>0$) จะได้ว่า

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-p+1}\left(b^{-p+1}\right) = \infty$$

เพราะฉะนั้น $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และลู่ออกเมื่อ $p\le 1$

แบบฝึกหัด 3.2

1. ให้ $g(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \geq a$ และสมมติว่า $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออก
   ดังนั้น ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \geq a$ จงพิสูจน์ว่า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก
   วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \geq a$
   ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $M > a$ จะได้ $f(x) \geq g(x)$สำหรับทุก ๆ $x \in [a, M]$
   โดยทฤษฎีบท 2.1 ข้อ 8 จะได้ว่า

$$\int_a^M f(x)\,dx \geq \int_a^M g(x)\,dx$$
$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx \geq \lim_{M\to\infty}\int_a^M g(x)\,dx$$

   เพราะว่า $\int_a^\infty g(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$ ลู่ออก
   ดังนั้น $\lim_{M\to\infty}\int_a^M g(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก

2. จงทดสอบว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

   (ก) $\int_2^\infty \frac{x^2}{x^5+4x^3-1}\,dx$
   วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{x^2}{x^5+4x^3-1}\right) = 1$
   โดยทฤษฎีบท 3.5 ข้อ 1) จะได้ว่า $\int_2^\infty \frac{x^2}{x^5+4x^3-1}\,dx$ ลู่เข้า

   (ข) $\int_3^\infty \frac{x^4-1}{\sqrt{x^{10}+1}}\,dx$
   วีธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x^4-1}{\sqrt{x^{10}+1}}\right) = 1$
   โดยทฤษฎีบท 3.5 ข้อ 2) จะได้ว่า $\int_3^\infty \frac{x^4-1}{\sqrt{x^{10}+1}}\,dx$ ลู่ออก

4. จงพิสูจน์ว่า $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^4}\,dx$ ลู่เข้าสัมบูรณ์
   วิธีทำ เนื่องจาก $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^4}\right| \leq \frac{1}{x^4}$ สำหรับทุก ๆ $x \geq 1$
   เนื่องจาก $4 > 1$ โดยทฤษฎีบท 3.1 ข้อ ข) จะได้ว่า $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ ลู่เข้า
   โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^4}\right|\,dx$ ลู่เข้า
   เพราะฉะนั้น $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^4}\,dx$ ลู่เข้าสัมบูรณ์

6. จงตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ต่อไปนี้

(ข) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนจำกัด

โดยทฤษฎีบท 3.9 ข้อ 1) จะได้ว่า $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$ ลู่เข้า

ต่อไปพิจารณา $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 4^-}(4-x)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนจำกัด

โดยทฤษฎีบท 3.10 ข้อ 1) จะได้ว่า $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$ ลู่เข้า

เนื่องจาก $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$

ดังนั้น $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)(x-2)}}\,dx$ ลู่เข้า

(ง) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\displaystyle\int_1^0 \frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\,dx$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\left(\frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\right) = 3^{\frac{\pi}{2}}$

โดยทฤษฎีบท 3.10 ข้อ 2) จะได้ว่า $\displaystyle\int_1^0 \frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\,dx$ ลู่ออก

เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\,dx = -\int_1^0 \frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\,dx$

ดังนั้น $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^{\cos^{-1}x}}{x}\,dx$ ลู่ออก

8. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin kx\,dx$ ลู่เข้าสม่ำเสมอและลู่เข้าสัมบูรณ์ สำหรับจำนวนจริง k ใด ๆ และ α ที่ซึ่ง $0 < a \le \alpha \le b$

วิธีทำ เลือก $M(x) = e^{-ax}$ เมื่อ $0 < a \le \alpha \le b$

จะได้ว่า $|e^{-\alpha x}\sin kx| \le M(x)$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^\infty M(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ และ $0 < a$

โดยทฤษฎีบท 3.1 ข้อ ก) จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty M(x)dx$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.12 จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin kx\,dx$ ลู่เข้าสม่ำเสมอและลู่เข้าสัมบูรณ์ สำหรับจำนวนจริง k ใด ๆ และ α ที่ซึ่ง $0 < a \le \alpha \le b$

แบบฝึกหัด 3.3

2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a, b > 0$ แล้ว

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

พิสูจน์. ให้ $M(x) = e^{-ax}$ จะเห็นว่า

$$|e^{-\alpha x}| \leq e^{-ax} = M(x) \qquad \forall \alpha \in [a, b]$$

และ

$$\int_0^\infty M(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$

เป็นปริพันธ์ลู่เข้า (ปริพันธ์เรขาคณิต ; $a > 0$)
โดยทฤษฎีบทการทดสอบเอ็มไวแยร์สตราสส์ (ทฤษฎีบท 3.12) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$$

ลู่เข้าสม่ำเสมอในช่วง $[a, b]$ และเนื่องจาก

$$\int_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

ซึ่ง $e^{-\alpha x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับปริพันธ์ลู่เข้าสม่ำเสมอ (ทฤษฎีบท 3.15) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx &= \int_0^\infty \int_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha\,dx \\
&= \int_a^b \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx\,d\alpha \\
&= \int_a^b \left(\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-\alpha x}\,dx\right)\,d\alpha \\
&= \int_a^b \frac{1}{\alpha}\,d\alpha = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \bigstar
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.4

2. จงหาค่าของ $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ. จากตารางปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ ชนิดที่ 1 เมื่อ $\psi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ และ $\phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$
จะได้ว่า $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right) = 1.0896$ ★

---

3. จงพิสูจน์ว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

พิสูจน์. เนื่องจาก

$$2-\cos x = 2-\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right) = 3-2\cos^2\frac{x}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{3-2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

ให้ $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - u$ ดังนั้น

$$\cos\frac{x}{2} = \sin u \text{ และ } x = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} \text{ และ } x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}\,du - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}\,du\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\} \qquad \bigstar
\end{aligned}$$

---

5. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+9)}}\,dx$$

วิธีทำ. ให้ $x = \sec\theta$ ดังนั้น

$$x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ และ } x = \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+9)}}\,dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)(\sec^2\theta+9)}}\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sec\theta}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}+9}}\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sec\theta\cos\theta}{\sqrt{1+9\cos^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{10-9\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{10}\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{9}{10}},\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{9}{10}},\frac{\pi}{4}\right)\right\} \qquad \bigstar
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.5

จงหาค่าปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบต่อไปนี้

2. $\int_{\frac{4}{3}}^{\infty}\int_{3}^{\infty}\frac{1}{(xy-2)^2}\,dxdy$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_{3}^{\infty}\frac{1}{(xy-2)^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{3}^{b}\frac{1}{(xy-2)^2}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{y(xy-2)}\right]_{x=3}^{b}\\ &= \frac{1}{y(3y-2)}\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{\frac{4}{3}}^{\infty}\int_{3}^{\infty}\frac{1}{(xy-2)^2}\,dxdy &= \int_{\frac{4}{3}}^{\infty}\frac{1}{y(3y-2)}\,dy\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{\frac{4}{3}}^{b}\frac{1}{y(3y-2)}\,dy\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|3-\frac{2}{y}\right|\right]_{y=\frac{4}{3}}^{b}\\ &= \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$