แนวคิดเฉลยการบ้านครั้งที่ 3
รายวิชา 206331(คณิตศาสตร์ขั้นสูง)

แบบฝึกหัด 1.7

จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วย $\vec{U}$ โดยใช้นิยาม

3. $\phi(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$ **เมื่อ** $\overrightarrow{U} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

วิธีทำ จาก $\overrightarrow{U} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{j}$

จะได้ว่า $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}, \cos\beta = -\dfrac{2}{3}$ และ $\cos\gamma = \dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
D_{\overrightarrow{U}}\phi(x,y,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h\cos\alpha, y+h\cos\beta, z+h\cos\gamma) - \phi(x,y,z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\phi\left(x+h\left(\frac{2}{3}\right), y+h\left(-\frac{2}{3}\right), z+h\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \phi(x,y,z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(y+h\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(z+h\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 - (x^2-y^2+2z^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+\frac{4}{3}xh+\frac{4}{9}h^2-y^2+\frac{4}{3}yh-\frac{4}{9}h^2+2z^2+\frac{4}{3}zh+\frac{2}{9}h^2-x^2+y^2-2z^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3}xh-\frac{4}{3}yh+\frac{4}{3}zh+\frac{2}{9}h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}z+\frac{2}{9}h\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}z+\frac{2}{9}h\right) \\
&= \frac{4}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}z+0 \\
&= \frac{4}{3}(x-y+z)
\end{aligned}$$

จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางที่จุด P_0 ของฟังก์ชันที่กำนหดให้ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}$

6. $h(x,y,z) = e^{\tan\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **เมื่อ** $\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{k}$ และ $P_0 = (2\pi, \pi, -2\pi)$

วิธีทำ เพราะว่า
$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{k}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{3}^2} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\overrightarrow{U} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{17}}\vec{k}$$

จาก $h_x(x,y,z) = \dfrac{x(\sec^2\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{\tan\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$h_y(x,y,z) = \frac{y(\sec^2\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{\tan\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$h_z(x,y,z) = \frac{z(\sec^2\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{\tan\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

จะได้ว่า $\Delta h(x,y,z) = \dfrac{(\sec^2\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{\tan\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

ดังนั้น

$$\Delta h(2\pi,\pi,-2\pi) = \frac{(\sec^2\sqrt{(2\pi)^2+\pi^2+(-2\pi)^2})e^{\tan\sqrt{(2\pi)^2+\pi^2+(-2\pi)^2}}}{\sqrt{(2\pi)^2+\pi^2+(-2\pi)^2}}(2\pi\vec{i} + \pi\vec{j} - 2\pi\vec{k})$$

$$= \frac{1}{3\pi}(\sec^2 3\pi)e^{\tan 3\pi}(2\pi\vec{i} + \pi\vec{j} - 2\pi\vec{k})$$

$$= \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$D_{\overrightarrow{U}}h(2\pi,\pi,-2\pi) = \overrightarrow{U}\cdot\Delta h(2\pi,\pi,-2\pi)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{17}}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{17}} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{17}} - \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}$$

จากฟังก์ชัน f จุด P และเวกเตอร์หน่วย $\vec{u}$ ที่กำหนดให้ จงหา

(ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด P ในทิศทางของ $\vec{u}$

(ข) ขนาดการเปลี่ยนแปลง f ที่มากที่สุด ที่จุด P

9. $f(x,y,z) = \sin(xyz)+\cos(xyz)$ เมื่อ $\overrightarrow{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$ และ $P = \left(2\pi^{\frac{1}{3}}, \frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}, \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)$

วิธีทำ (ก) จาก $D_x f(x,y,z) = yz\cos(xyz) - yz\sin(xyz)$

$D_y f(x,y,z) = xz\cos(xyz) - xz\sin(xyz)$

$D_z f(x,y,z) = xy\cos(xyz) - xy\sin(xyz)$

จะได้ว่า $\Delta f(x,y,z) = (\cos(xyz) - \sin(xyz))\left(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}\right)$

ดังนั้น

$$\Delta f\left(2\pi^{\frac{1}{3}}, \frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}, \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)$$

$$= \left(\cos\left[\left(2\pi^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}\right)\left(\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)\right] - \sin\left[\left(2\pi^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}\right)\left(\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)\right]\right)\left(\left(\frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}\right)\left(\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)\vec{i}+\left(2\pi^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)\vec{j}\right.$$

$$\left. + \left(2\pi^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}\right)\vec{k}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4}\vec{i} + \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{3}\vec{j} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\vec{k}\right)$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4}\vec{i} - \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{3}\vec{j} - 3\pi^{\frac{2}{3}}\vec{k}$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด P ในทิศทางของ $\vec{u}$ คือ

$$\begin{aligned}
\Delta f\left(2\pi^{\frac{1}{3}}, \frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}, \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right) &= \overrightarrow{U}\cdot\Delta f\left(2\pi^{\frac{1}{3}}, \frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}, \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\right)\cdot\left(-\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4}\vec{i} - \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{3}\vec{j} - 3\pi^{\frac{2}{3}}\vec{k}\right) \\
&= -\pi^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{43}{12\sqrt{3}}\pi^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

วิธีทำ (ข) ขนาดการเปลี่ยนแปลงของ f ที่มากที่สุด ที่จุด P คือ

$$\begin{aligned}
\left|\Delta f\left(2\pi^{\frac{1}{3}}, \frac{3\pi^{\frac{1}{3}}}{2}, \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{6}\right)\right| &= \left|-\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4}\vec{i} - \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{3}\vec{j} - 3\pi^{\frac{2}{3}}\vec{k}\right| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{3}\right)^2 + \left(-3\pi^{\frac{2}{3}}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1321}}{12}\pi^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.8

2. กำหนดให้ $3u + v^2 = x + y$ และ $u^2 + 2v = 2x + y$ จงหา $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

วิธีทำ ให้ $F(x, y, u, v) = 3u + v^2 - x - y = 0$ และ $G(x, y, u, v) = u^2 + 2v - 2x + y = 0$

จะได้ว่า $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2v \\ 2u & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4uv$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2v \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4v$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2u & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2u$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2v \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2v$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2u$$

จากทฤษฎีบท 1.12 จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{2 - 4v}{6 - 4uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{6 - 2u}{6 - 4uv}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{2 - 2v}{6 - 4uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{3 - 2u}{6 - 4uv}$$

6. กำหนดให้ R_{xy} เป็นระนาบ xy ที่ถูกล้อมรอบโดย $x = 0, x = 2, y = 0$ และ $y = 2$

   (ก) จงหาบริเวณ R_{uv} ซึ่งเกิดจากการเปลี่ยน R_{xy} ภายใต้ความสัมพันธ์ $x = 3u + v$ และ $y = u - v$

   (ข) จงหา $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

   (ค) จงเปรียบเทียบอัตราส่วนของพื้นที่ A_{xy} กับ A_{uv} ดังข้อ (ข)

วิธีทำ (ก) บริเวณ R_{xy} จะถูกแปลงโดยสมการ $x = 3u + v$ และ $y = u - v$

ดังนั้นเส้นขอบของ R_{xy} จะถูกแปลงดังนี้

$x = 0$ ถูกแปลงเป็น $v = -3u$

$x = 2$ ถูกแปลงเป็น $v = 2 - 3u$

$y = 0$ ถูกแปลงเป็น $u = v$

$y = 2$ ถูกแปลงเป็น $u = 2 + v$

วิธีทำ (ข) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4$

วิธีทำ (ค) พื้นที่ของบริเวณ R_{xy} คือ $A_{xy} = 2 \times 2 = 4$ ตารางหน่วย

และพื้นที่ของบริเวณ R_{uv} คือ $A_{uv} = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right) = 1$ ตารางหน่วย

ดังนั้นจะได้ $\dfrac{A_{xy}}{A_{uv}} = \dfrac{4}{1} = 4 = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

10. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1.11

พิสูจน์ นิยามให้ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร t และให้ x, y, z, θ, β และ γ เป็นค่าคงตัวโดยที่

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\cos\beta, z + tcos\gamma)$$

จากนิยามของอนุพันธ์ของฟังก็ชัน $g(t)$ ณ จุด $t = 0$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x + h\cos\theta, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - f(x,y,z)}{h} \\ &= D_{\overrightarrow{U}} f(x,y,z) \quad \text{โดยนิยามอนุพันธ์ระบุทิศทาง} \end{aligned} \tag{1}$$

กำหนดให้ $r = x + t\cos\theta, s = y + t\cos\beta$ และ $u = z + t\cos\gamma$ (2)

จะได้ $g(t) = f(r,s,u)$ โดยที่ r, s และ u เป็นฟังก็ชันของ t (เนื่องจากให้ x, y, z, θ, β และ γ เป็นค่าคงตัว) จาก (2) ดังนั้น

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial s}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial u}\cos\gamma \end{aligned}$$

จาก (2) เมื่อ $t = 0$ จะได้ $r = x, s = y$ และ $u = z$

ดังนั้น $g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$ (3)

จาก (1) และ (3) จะได้

$$D_{\overrightarrow{U}} f(x,y) = \cos\theta f_x(x,y,z) + \cos\beta f_y(x,y,z) + \cos\gamma f_z(x,y,z)$$

แบบฝึกหัด 1.9

2. จงหาปริมาตรของบริเวณที่อยู่เหนือระนาบ xy ซึ่งล้อมรอบโดยพาราโบลอยด์ $x = x^2 + y^2$ และรูปทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2$ (ข้อแนะนำ : ให้ใช้พิกัดทรงกระบอกในการคำนวณ)

วิธีทำ สมการแปลงในพิกัดทรงกระบอก คือ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ และ $z = z$ ดังนั้น

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \int\int\int_R F(x,yz)dxdydz &= \int\int\int_{R'} G(r,\theta,z)|J(r,\theta,z)|drd\theta dz \\ &= \int\int\int_{R'} G(r,\theta,z)rdrd\theta dz \end{aligned}$$

โดย R' เป็นบริเวณในปริภูมิ r, θ, z ที่สมนัยกับ R และ

$$G(r,\theta,z) = F(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

ดังนั้นปริมาตรของบริเวณที่อยู่เหนือระนาบ xy ซึ่งล้อมรอบโดยพาราโบลอยด์และรูปทรง-กระบอกคือ

$$\begin{aligned} \int\int\int_R F(x,y,z)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} rdzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 dr\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4}d\theta \\ &= \frac{a^4\pi}{2} \text{ ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$