แนวคิดเฉลยการบ้านครั้งที่ 2
รายวิชา 206331(คณิตศาสตร์ขั้นสูง)

แบบฝึกหัด 1.4

กำหนด $f(x,y)$ มาให้ จงหา $D_xf(1,3)$ โดยใช้สูตร

ก) $D_xf(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

ข) $D_xf(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$

ค) $D_xf(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$

จากนั้นจึงแทนค่า $(x,y) = (1,3)$

7. $f(x,y) = 4y - x^2$

ก) **วิธีทำ** จาก $D_xf(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
D_xf(1,3) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x, 3) - f(1,3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3(1+\Delta x)(3) + 2(1+\Delta x)^3 - (3(1)(3) + 2(1^3))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{9 + 9\Delta x + 2\left(1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) - 9 - 2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{15\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(15 + 6\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} (15 + 6\Delta x + 2(\Delta x)^2) \\
&= 15 + 6(0) + 2(0^2) \\
&= 15
\end{aligned}$$

ข) **วิธีทำ** จาก $D_x f(x_0,y_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
D_x f(1,3) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x,3)-f(1,3)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3x(3)+2x^3-(3(1)(3)+2(1^3))}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2x^3+9x-11}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x^2+2x+11)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}(2x^2+2x+11) \\
&= 2(1^2)+2(1)+11 \\
&= 15
\end{aligned}$$

ค) **วิธีทำ** จาก $D_x f(x,y) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
D_x f(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3(x+\Delta x)y+2(x+\Delta x)^3-(3xy+2x^3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3xy+3(\Delta x)y+2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3-3xy-2x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3(\Delta x)y+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)\big(3y+6x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} (3y+6x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2) \\
&= 3y+6x^2+6(0)x+3(0^2) \\
&= 3y+6x^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $D_x f(1,3) = 3(3)+6(1^2) = 15$

12. จงหา $D_xf(0,0)$ และ $D_yf(0,0)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{ถ้า } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

วิธีทำ จาก $D_xf(x_0,y_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} D_xf(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2+0^2}{x+0}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

และจะได้ว่า
$$\begin{aligned} D_yf(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0^2+y^2}{0+y}}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

15. จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว $z = \sqrt{x^2+y^2}$ และระนาบ $y = 1$ ที่จุด $(1,1,\sqrt{2})$

วิธีทำ จะหา $D_xf(x,y)$ จาก

$$\begin{aligned} D_xf(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว $z = \sqrt{x^2+y^2}$ และระนาบ $y = 1$ ที่จุด $(1,1,\sqrt{2})$ คือ $D_x(1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

แบบฝึกหัด 1.5

จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปรหาค่า ξ_1 หรือ ξ_2 โดยที่

5. $f(x,y) = x^3 - y^2$ เมื่อ $x \in [1,6]$ และ $b = 2$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = x^3 - y^2$

จะได้ว่า $D_x(x,y) = 3x^2$

จากหมายเหตุ 1.5 ในทฤษฎีบท 1.7 จะมี ξ_1 ในช่วงปิด $[1,6]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} f(6,2) - f(1,2) &= (6-1)D_x f(\xi_1, 4) \\ 6^3 - 2^2 - (1^3 - 2^2) &= 5(3\xi_1^2) \\ 215 &= 15\xi_1^2 \\ \xi_1^2 &= \frac{215}{15} \\ \xi_1 &= \pm\sqrt{\frac{43}{3}} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $1 < \xi_1 < 6$ ดังนั้น $\xi_1 = \sqrt{\frac{43}{3}}$

7. จงพิสูจน์ว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ โดยใช้ทฤษฎีบท เมื่อกำหนดให้

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

วิธีทำ ก่อนอื่นจะต้องหา $D_x f$ ซึ่งจะแยกกรณีคือ $(x,y) = (0,0)$ และ $(x,y) \neq (0,0)$

(ก) กรณี $(x,y) = (0,0)$ จากนิยามของอนุพันธ์ย่อย

$$\begin{aligned} D_x f(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x(0)(x^2-0^2)}{x^2-0^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ข) กรณี $(x,y) \neq (0,0)$ สามารถหาโดยใช้หลักของการหาอนุพันธ์ย่อย จะได้

$$\begin{aligned}
D_x f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} \\
&= \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^3y-xy^3)-(x^3y-xy^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$D_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$D_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $D_x f(x,y)$ และ $D_x f(x,y)$มีที่ทุกๆ จุด (x,y) ในย่านจุด $(0,0)$ ต่อไปจะแสดงว่า $D_x f$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

(1) $D_x f(0,0) = 0$

(2) จะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_x f(x,y) = 0$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6} > 0$ เมื่อ $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ นั่นคือ $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|D_x f(x,y) - 0| &= \left|\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\right||y| + 4\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right||y| + \left|\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right||y| \\
&\leq |y| + 4|y| + |y| \\
&= 6|y| \\
&< 6\delta \\
&= 6\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $D_y f$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$
โดยทฤษฎีบท 1.8 สรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$

10. จงพิสูจน์ว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0,0)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2} & \text{เมื่อ } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

วิธีแรก (ใช้นิยาม)

จาก $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2} & \text{เมื่อ } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}D_xf(0,0,0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2(0)(0)}{x^2+0^2+0^2}-0}{x}\\&=\lim_{x\to0}0\\&=0\\D_yf(0,0,0)&=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y,0)-f(0,0,0)}{y-0}\\&=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0^2(y)(0)}{0^2+y^2+0^2}-0}{y}\\&=\lim_{y\to0}0\\&=0\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $D_zf(0,0,0)=0$

จาก $\Delta f(x_0,y_0,z_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Delta f(0,0,0)=&\ \frac{(\Delta x)^2\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}-0\\=&\ 0(\Delta x)+0(\Delta y)+0(\Delta z)+\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)(\Delta z)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\\=&\ D_xf(0,0,0)\Delta x+D_yf(0,0,0)\Delta y+D_zf(0,0,0)\Delta z\\&+\frac{(\Delta x)^2\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\\=&\ D_xf(0,0,0)\Delta x+D_yf(0,0,0)\Delta y+D_zf(0,0,0)\Delta z\\&+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)\Delta x+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{(\Delta x)^2\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)\Delta y\\&+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)\Delta z\end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=0$

ให้ $\varepsilon>0$ เลือก $\delta=3\varepsilon>0$

สำหรับทุกจุด $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ ที่ $0<\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}<\delta$

จะเห็นว่า $|\Delta x|=\sqrt{(\Delta x)^2}\le\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}<\delta$,

$\dfrac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\le 1$ และ $\dfrac{|\Delta z|}{\sqrt{(\Delta z)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\le 1$

จะได้ว่า
$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}-0\right|\\
&=\left|\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right|\\
&=\frac{|\Delta x|}{3}\left(\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\right)\left(\frac{|\Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\right)\\
&\le\frac{|\Delta x|}{3}\\
&<\frac{\delta}{3}\\
&=\frac{3\varepsilon}{3}\\
&=\varepsilon
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{3}\right)\frac{(\Delta x)^2\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=0$$

และ

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{3}\right)\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=0$$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\\
\varepsilon_2&=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{(\Delta x)^2\Delta z}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\\
\varepsilon_3&=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0,0)$

วิธีที่สอง (ใช้ทฤษฎีบท)

ก่อนอื่นจะต้องหา D_xf ซึ่งจะแยกกรณีคือ $(x,y,z)=(0,0,0)$ และ $(x,y,z)\neq(0,0,0)$

(ก) กรณี $(x,y,z)=(0,0,0)$ โดยวิธีแรกจะได้ว่า

$$D_xf(0,0,0)=D_yf(0,0,0)=D_zf(0,0,0)=0$$

(ข) กรณี $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ สามารถหาโดยใช้หลักของการหาอนุพันธ์ย่อยจะได้

$$\begin{aligned} D_x f(x,y,z) &= \frac{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) - x^2yz\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ &= \frac{2xy^3z + 2xyz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ D_y f(x,y,z) &= \frac{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) - x^2yz\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ &= \frac{x^4z + x^2z^3 - x^2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$D_z f(x,y,z) = \frac{x^4y + x^2y^3 - x^2yz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$D_x f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3z + 2xyz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2} & ,(x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$D_y f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^4z + x^2z^3 - x^2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} & ,(x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$D_z f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + x^2y^3 - x^2yz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & ,(x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $D_x f(x,y,z), D_y f(x,y,z)$ และ $D_z f(x,y,z)$ มีที่ทุก ๆ จุด $(x,y,z))$ ในย่านจุด $(0,0,0)$
ต่อไปจะแสดงว่า $D_x f$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0,0)$

(1) $D_x f(0,0,0) = 0$

(2) จะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} D_x f(x,y,z) = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4} > 0$ สำหรับทุก ๆ จุด (x,y,z) ที่ $0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$ จะเห็นว่า

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$$

$$|z| = \sqrt{z^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq 1$$

$$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq 1$$

และ

$$\frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq 1$$

จะได้ว่า $\left|\frac{2xy^3z+2xyz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 0\right|$

$$= \left|\frac{2xy^3z+2xyz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{2xy^3z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right| + \left|\frac{2xyz^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|$$

$$= 2|y|\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left(\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$+ 2|z|\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left(\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left(\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\leq 2|y| + 2|z|$$

$$< 2\delta + 2\delta$$

$$= 4\delta$$

$$= 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

$$= \varepsilon$$

และจะแสดงว่า $D_y f$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0,0)$

(1) $D_y f(0,0,0) = 0$

(2) จะแสดงว่า $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} D_y f(x,y,z) = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ สำหรับทุกจุด (x,y,z) ที่ $0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$ จะเห็นว่า

$$|z| = \sqrt{z^2} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$$

จะได้ว่า $\left|\frac{x^4z+x^2z^3-x^2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 0\right|$

$$= \left|\frac{x^4z+x^2z^3-x^2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x^4z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right| + \left|\frac{x^2z^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right| + \left|\frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^4}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)|z| + \left(\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\left(\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)|z| \\
&\quad + \left(\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)|z| \\
&\le |z| + |z| + |z| \\
&= 3|z| \\
&< 3\delta \\
&= 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $D_z f$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0,0)$
โดยทฤษฎีบท 1.8 สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร สรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0,0)$

11. กำหนดให้ s เป็นความถ่วงจำเพาะของวัตถุอย่างหนึ่งมีสูตร $s = \dfrac{A}{A-W}$ โดยที่ A และ W เป็นน้ำหนักของวัตถุในอากาศและในน้ำตามลำดับ ซึ่งมีหน่วยเป็นปอนด์ ถ้าน้ำหนักของวัตถุในอากาศและในน้ำชั่งได้เท่ากับ 20 ปอนด์ และ 12 ปอนด์ ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนที่เป็นไปได้ 0.01 ปอนด์ และ 0.02 ปอนด์ ตามลำดับ จงหาค่าโดยประมาณของความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุดที่เป็นไป ได้ในการคำนวณ s จากการชั่งครั้งนี้แล้วหาเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อน

วิธีทำ จาก $s = \dfrac{A}{A-W}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial s}{\partial A} = -\frac{W}{(A-W)^2} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial A}{\partial W} = \frac{A}{(A-W)^2}$$

จากนิยามผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม $ds = \dfrac{\partial s}{\partial A}dA + \dfrac{\partial s}{\partial W}dW$

เพราะฉะนั้น

$$|ds| \le \left|\frac{\partial s}{\partial A}\right||dA| + \left|\frac{\partial s}{\partial W}\right||dW|$$

เนื่องจาก $dA \approx \Delta A \le 0.01, dW \approx \Delta W \le 0.02, A = 20$ และ $W = 12$
จะได้ว่า ความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ในการคำนวณ s คือ

$$
\begin{aligned}
|ds| &\le \left|\frac{12}{(20-12)^2}\right|(0.01) + \left|\frac{20}{(20-12)^2}\right|(0.02) \\
&= \frac{0.52}{64} \\
&= \frac{52}{6400}
\end{aligned}
$$

เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเท่ากับ $\dfrac{ds}{s} \times 100 = \dfrac{52}{6400} \times \dfrac{8}{20} \times 100 = 0.325$

แบบฝึกหัด 1.6

3. กำหนดให้ $f(x, y, z) = xy^2z^3\left[e^{\frac{x}{y}} + \ln\left(\frac{y}{z}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{z}\right)\right]\sin^{-1}\left(\frac{xy}{z^2}\right)$

จงพิสูจน์ว่า $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 6f$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$$= (\lambda x)(\lambda y)^2(\lambda z)^3\left[e^{\frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda} y}} + \ln\left(\frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} z}\right) + \cos^2\left(\frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda} z}\right)\right]\sin^{-1}\left(\frac{\cancel{\lambda} x \cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda^2} z^2}\right)$$

$$= \lambda^6 xy^2z^3\left[e^{\frac{x}{y}} + \ln\left(\frac{y}{z}\right) + \cos^2\frac{x}{z}\right]\sin^{-1}\frac{xy}{z^2}$$

$$= \lambda^6 f(x, y, z)$$

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีลำดับขั้น 6

จากโจทย์เห็นชัดว่าเราสามารถหา $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ และ $\frac{\partial f}{\partial z}$ ในทุกจุดใน D_f

จากทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธ์ (ทบ.1.9)
จะได้ว่า

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 6f$$

#