แนวคิดเฉลยการบ้าน

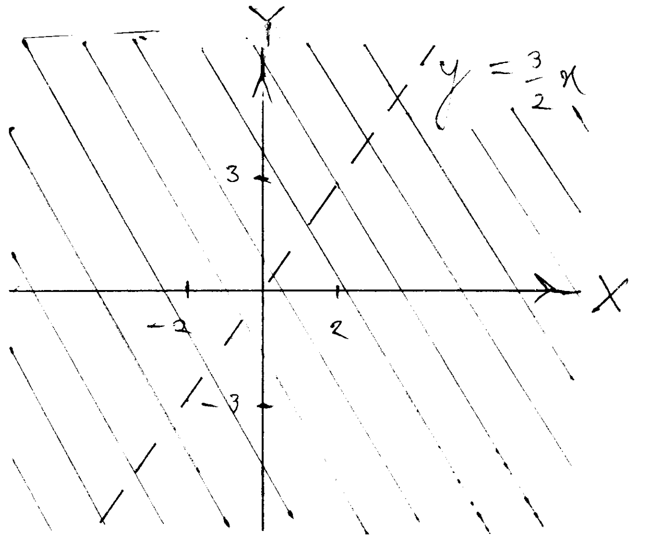
รายวิชา 206331(คณิตศาสตร์ขั้นสูง)

แบบฝึกหัด 1.1

จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f พร้อมวาดภาพแสดงบริเวณที่เป็นโดเมนของ f

4. $f(x,y) = \frac{4y^2-9x^2}{3x-2y}$

จะเห็นว่า $f(x,y) \in \mathbb{R}$ เมื่อ $3x - 2y \neq 0$
นั่นคือ $y \neq \frac{3}{2}x$
ดังนั้น $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq \frac{3}{2}x\}$
ซึ่งมีภาพดังต่อไปนี้



ต่อไปจะหา R_f
กำหนดให้ z เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณาจุด $\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right) \in \mathbb{R}^2$
จะเห็นว่า $-\frac{1}{4}(z-2) = \frac{3}{2}(-\frac{1}{6}(z+2)) + 1$
นั่นคือ $\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right)$ อยู่บนเส้นตรง $y = \frac{3}{2}x + 1$ ซึ่งขนานกับเส้นตรง $y = \frac{3}{2}x$
ทำให้ได้ว่า $\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right)$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $y = \frac{3}{2}x$
นั่นคือ $\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right) \in D_f$
และเรายังพบอีกว่าสำหรับทุกจุด $(x,y) \in D_f$ จะได้ว่า

$$f(x,y) = \frac{4y^2-9x^2}{3x-2y} = \frac{-(9x^2-4y^2)}{3x-2y} = -\frac{(3x)^2-(2y)^2}{3x-2y} = -\frac{(3x-2y)(3x+2y)}{3x-2y} = -3x-2y$$

ทำให้ได้ว่า $f\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right) = z$
ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง z ใดๆ จะมีจุด $\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right) \in D_f$
ซึ่ง $f\left(-\frac{1}{6}(z+2), -\frac{1}{4}(z-2)\right) = z$
เพราะฉะนั้น $R_f = \mathbb{R}$

แบบฝึกหัด 1.2

จงพิสูจน์ว่า $_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มี

1. $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^3}$

   หาลิมิตทำซ้ำ

   $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+y^3}\right) = \lim_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+0} = 1$

   $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+y^3}\right) = \lim_{y\to 0}\dfrac{0}{0+y^3} = 0$

   เนื่องจากลิมิตทำซ้ำทั้งสองแบบมีค่าไม่เท่ากัน

   ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มี

จงหาค่าของลิมิตที่กำหนดให้โดยใช้ทฤษฎีบทของลิมิต

10. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+y}}{y}$

    ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x} = 1$ และ $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x+y} = 1$

    ในการแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x} = 1$ ทำได้ดังนี้

    กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\{1,\varepsilon\} > 0$ สำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ที่

    $0 < \|(x,y)-(1,0)\| = \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} < \delta$

    จะเห็นว่า $|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \le \sqrt{(x-1)^2+y^2} < \delta$

    เนื่องจาก $\delta \le 1$ ดังนั้น

$$|x-1| < \delta \le 1$$
$$-1 < x-1 < 1$$
$$0 < x < 2$$
$$0 < \sqrt{x}$$
$$1 < \sqrt{x}+1$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x}-1| &= \left|(\sqrt{x}-1)\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right| \\
&= \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} \\
&\le |x-1| \text{ เนื่องจาก } \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 1 \\
&< \delta \\
&\le \varepsilon \text{ เนื่องจาก } \delta = \min\{1,\varepsilon\} \le \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x} = 1$

ส่วนการแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x+y} = 1$ ทำได้ดังนี้

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ สำหรับจุด (x,y) ใดๆ ที่ $0 < \|(x,y)-(1,0)\| = \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} < \delta$ จะเห็นว่า

$$|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \le \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} < \delta \text{ และ}$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} < \delta$$

เนื่องจาก $\delta \le \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$|x-1| < \delta \le \frac{1}{2} \text{ และ } |y| \le \delta \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \text{ และ } -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < x \text{ และ } -\frac{1}{2} < y$$

$$0 < x+y$$

$$0 < \sqrt{x+y}$$

$$1 < \sqrt{x+y}+1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}+1} < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x+y}-1| &= \left|(\sqrt{x+y}-1)\frac{\sqrt{x+y}+1}{\sqrt{x+y}+1}\right| \\
&= \frac{|x+y-1|}{\sqrt{x+y}+1} \\
&< |(x-1)+y| \text{ เนื่องจาก } \frac{1}{\sqrt{x+y}+1} < 1 \\
&\le |x-1|+|y| \\
&< \delta+\delta \\
&= 2\delta \\
&\le 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ เนื่องจาก } \delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\} \le \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x+y} = 1$

ต่อไปเป็นการหา $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+y}}{y}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+y}}{y} &= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+y}}{y}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-(x+y)}{y(\sqrt{x}+\sqrt{x+y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}} \\
&= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} -1}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (\sqrt{x}+\sqrt{x+y})} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 1.1} \\
&= \frac{-1}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x} + \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x+y}} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 1.1} \\
&= \frac{-1}{1+1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

จงหาว่ามีลิมิตที่จุด $(0,0)$ หรือไม่ถ้ามีจงหาค่าของลิมิตนั้นด้วย

13. $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}$

    หาลิมิตทำซ้ำ

    $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+0}{x^2+0} = \infty$

    $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0+y^2}{0+y^2} = 1$

    เนื่องจากลิมิตทำซ้ำทั้งสองแบบมีค่าไม่เท่ากัน

    ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มี

แบบฝึกหัด 1.3

จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

1. ข) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$
   เพราะว่า $\log 0$ หาค่าไม่ได้
   ดังนั้น $\log(0^2+0^2)$ จึงหาค่าไม่ได้
   นั่นคือ $f(0,0)$ หาค่าไม่ได้
   เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ ณ จุด $(0,0)$

   จากการลองหาลิมิตทำซ้ำและหาลิมิตตามบางเส้นทางที่ผ่านจุด $(0,0)$ คาดว่า

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์
ให้ $\varepsilon > 0$
เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$
จะได้ว่าสำหรับทุก $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$
นั่นคือ $|x| < \delta$ และ $|y| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } |f(x,y)-0| &= \left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &= \left|\frac{2x^3}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{2x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|-\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &= 2|x|\underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} + |y|\underbrace{\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} \\ &\leq 2\underbrace{|x|}_{<\delta} + \underbrace{|y|}_{<\delta} < 2\delta + \delta = 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
เพราะว่า $f(0,0) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่อง ณ จุด $(0,0)$

8. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่แตกต่างจากที่มีในหนังสือนี้จำนวนสองฟังก์ชัน โดยที่ f ต่อเนื่องใน $\mathbb{R}^2$ ยกเว้นที่จุด $(0,0)$ เท่านั้น และ $f(0,0)$ หาค่าได้ โดยต้องพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า $f(x,y)$ มีคุณสมบัติดังกล่าวจริง

<u>Sol^n</u> 1) $$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เห็นได้ชัดว่า $f(0,0)=0$ หาค่าได้

สำหรับ $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ จะเห็นชัดว่า

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 1 = f(x_0,y_0)$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ทุกจุด $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

สำหรับจุด $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

2) $$f(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

สามารถแสดงให้เห็นได้เช่นเดียวกับ (1)

#