แนวคิดเฉลยการบ้านครั้งที่ 5
รายวิชา 206331(คณิตศาสตร์ขั้นสูง)

แบบฝึกหัด 2.1

3. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขตพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

   (ข) ถ้า $x \in [a,b]$ และ $m \le f(x) \le M$ โดยที่ m และ M เป็นค่าคงตัวแล้ว

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์กำหนด $m \le f(x) \le M$ ตลอดช่วง $[a,b]$ ให้แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วง โดยที่แต่ละช่วง $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ ซึ่ง $i = 1,2,\ldots,n$ ดังนั้น

$$m \le f(\xi_i) \le M$$

เมื่อ ξ_i เป็นจุดใด ๆ ใน $\Delta_i x$ จะได้

$$\begin{aligned}
m\Delta_i x &\le f(\xi_i)\Delta_i x \le M\Delta_i x\\
\sum_{i=1}^{n} m\Delta_i x &\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i x\\
m\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x &\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \le M\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x\\
m(b-a) &\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \le M(b-a)\\
\lim_{n\to\infty} m(b-a) &\le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \le \lim_{n\to\infty} M(b-a)\\
m(b-a) &\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)
\end{aligned}$$

5. จงพิสูจน์ว่า $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\frac{n}{3^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$

วิธีทำ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\frac{n}{3^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{3}{n}\right)^2+1}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

7. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos^2\frac{\theta}{n} + \cos^2\frac{2\theta}{n} + \cos^2\frac{3\theta}{n} + \cdots + \cos^2\frac{n\theta}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4\theta}$

วิธีทำ ให้ $a = 0, b = \theta$ และ $f(x) = \cos^2 x$ ในตัวอย่างที่ 2.2 จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos^2(\frac{i\theta}{n}) = \int_0^\theta cos^2 x dx$$

$$\theta \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos^2(\frac{i\theta}{n}) = \int_0^\theta cos^2 x dx$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos^2(\frac{i\theta}{n}) &= \frac{1}{\theta}\int_0^\theta cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4\theta}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.2

2. จงพิสูจน์ว่ามี ξ_1 และ ξ_2 ในช่วง $(0,1)$ ที่ซึ่ง

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi_1} = \frac{e-1}{e\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

วิธีทำ จะพิสูจน์ว่ามี ξ_1 ในช่วง $(0,1)$ ที่ซึ่ง

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi_1}$$

ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ และ $g(x) = e^{-x}$

จะเห็นว่า f และ g ต่อเนื่องในช่วง $[0,1], g(x) \neq 0$ และ $g(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายในช่วง $[0,1]$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมที่หนึ่งสำหรับปริพันธ์แล้วจะมี $\xi_1 \in (0,1)$ ที่ซึ่ง

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x)\,dx &= g(\xi_1)\int_0^1 f(x)\,dx \\ \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= e^{-\xi_1}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= e^{-\xi_1}\left[\sin^{-1} x\right]_0^1 \\ &= e^{-\xi_1}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \frac{\pi}{2}e^{-\xi_1}\end{aligned}$$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่ามี ξ_2 ในช่วง $(0,1)$ ที่ซึ่ง

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{e-1}{e\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

ให้ $f(x) = e^{-x}$ และ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
จะเห็นว่า f และ g ต่อเนื่องในช่วง $[0,1], g(x) \neq 0$ และ $g(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายในช่วง $[0,1]$
โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมที่หนึ่งสำหรับปริพันธ์แล้วจะมี $\xi_2 \in (0,1)$ ที่ซึ่ง

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)g(x)\,dx &= g(\xi_2)\int_0^1 f(x)\,dx \\
\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\int_0^1 e^{-x}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\left[-e^{-x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\left(e^0 - e^{-1}\right) \\
&= \frac{e-1}{e\sqrt{1-\xi_2^2}}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.3

2. จงหาค่าของ

(ก) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} t^2 \tan t\,dt$

วิธีทำ จาก (2.12) ที่ว่า

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x} t^2\tan t\,dt &= x^2\tan x\frac{dx}{dx} - (\sqrt{x})^2\tan\sqrt{x}\frac{d\sqrt{x}}{dx} \\
&= x^2\tan x - \frac{1}{2}\sqrt{x}\tan\sqrt{x}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาค่าของ

(จ) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\sqrt{\alpha}} \frac{\cos\alpha x}{x}\,dx$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{\alpha}} \frac{\cos\alpha x}{x}\,dx &= \int_1^{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{x}\right)dx + \frac{\cos(\alpha\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\alpha} - \frac{\cos\alpha(1)}{1}\frac{d1}{d\alpha} \\
&= \int_1^{\sqrt{\alpha}} (-\sin\alpha x)\,dx + \frac{\cos(\alpha\sqrt{\alpha})}{2\alpha} - 0 \\
&= \left[\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_{x=1}^{\sqrt{\alpha}} + \frac{\cos(\alpha\sqrt{\alpha})}{2\alpha} \\
&= \frac{\cos(\alpha\sqrt{\alpha})}{\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha\sqrt{\alpha})}{2\alpha} \\
&= \frac{3\cos(\alpha\sqrt{\alpha})}{2\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

2. จงพิสูจน์ว่า

(ก) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \log(x+\alpha)\,dx$

$= \log\left(\dfrac{\alpha+\cos\alpha}{\alpha+\sin\alpha}\right) - \sin\alpha\log(\alpha+\cos\alpha) - \cos\alpha\log(\alpha+\sin\alpha)$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \ln(x+\alpha)\,dx$

โดยทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \ln(x+\alpha)\,dx &= \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \frac{\partial}{d\alpha}\left(\ln(x+\alpha)\right)\,dx + \ln(\cos\alpha+\alpha)\frac{d}{d\alpha}\cos\alpha \\
&\quad - \ln(\sin\alpha+\alpha)\frac{d}{d\alpha}\sin\alpha \\
&= \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} (x+\alpha)^{-1}\,dx + \ln(\cos\alpha+\alpha)(-\sin\alpha) \\
&\quad - \ln(\sin\alpha+\alpha)\cos\alpha \\
&= \left[\ln(x+\alpha)\right]_{x=\sin\alpha}^{\cos\alpha} - \sin\alpha\ln(\cos\alpha+\alpha) - \cos\alpha\ln(\sin\alpha+\alpha) \\
&= \ln(\cos\alpha+\alpha) - \ln(\sin\alpha+\alpha) - \sin\alpha\ln(\cos\alpha+\alpha) \\
&\quad - \cos\alpha\ln(\sin\alpha+\alpha) \\
&= \ln\left(\frac{\alpha+\cos\alpha}{\alpha+\sin\alpha}\right) - \sin\alpha\ln(\alpha+\cos\alpha) - \cos\alpha\ln(\alpha+\sin\alpha)
\end{aligned}$$

หารทั้งสองข้างของสมการด้วย $\ln 10$ จะได้

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \frac{\ln(x+\alpha)}{\ln 10}\,dx = \frac{\ln\left(\frac{\alpha+\cos\alpha}{\alpha+\sin\alpha}\right)}{\ln 10} - \sin\alpha\frac{\ln(\alpha+\cos\alpha)}{\ln 10} - \cos\alpha\frac{\ln(\alpha+\sin\alpha)}{\ln 10}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\log(x+\alpha)\,dx = \log\left(\frac{\alpha+\cos\alpha}{\alpha+\sin\alpha}\right)-\sin\alpha\log(\alpha+\cos\alpha)-\cos\alpha\log(\alpha+\sin\alpha)$$

6. กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos t)\,dt, 0 < |\alpha| < 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{d}{dx}\phi(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$$

วิธีทำ ถ้า $0 < \alpha < 1$ จะได้ว่า $\dfrac{1}{\alpha} > 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\cos t}\,dt &= \int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-\cos(\pi-t)}\,dt \\
&= \int_{\pi}^{0}\frac{-1}{\frac{1}{\alpha}-\cos x}\,dx \quad (\text{เมื่อ } x = \pi - t) \\
&= \int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-\cos x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}} \quad (\text{โดยตัวอย่าง } 2.15) \\
&= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}
\end{aligned}$$

ถ้า $-1 < \alpha < 0$ จะได้ว่า $\dfrac{1}{-\alpha} > 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\cos t}\,dt &= -\int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{-\alpha}-\cos t}\,dt \\
&= \frac{-\pi}{\sqrt{\frac{1}{(-\alpha)^2}-1}} \quad (\text{โดยตัวอย่าง } 2.15) \\
&= \frac{-\pi(-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \\
&= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}
\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\phi(\alpha) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln(1+\alpha\cos t)\,dt + \ln(1+\alpha\cos\pi)\frac{d\pi}{d\alpha} - \ln(1+\alpha\cos 0)\frac{d0}{d\alpha} \\
&= \int_0^\pi \frac{\cos t}{1+\alpha\cos t}\,dt + 0 - 0 \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{1+\alpha\cos t}\right)dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^\pi dt - \int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha\cos t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\pi - \frac{1}{\alpha}\int_0^\pi \frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\cos t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\pi - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\pi - \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right] \\
&= \frac{\pi}{\alpha}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]
\end{aligned}$$

8. กำหนดให้ $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha+\sin x}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}, \alpha > 0$ จงพิสูจน์ว่า

(ข) $\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx = 2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$

วิธีทำ หาปริพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ α โดยมีลิมิตจาก $\frac{5}{4}$ ถึง $\frac{5}{3}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{\alpha+\sin x}\,d\alpha dx &= \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,d\alpha \\
\int_0^{2\pi} \left[\ln(\alpha+\sin x)\right]_{\alpha=\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}\,dx &= 2\pi\left[\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right]_{\alpha=\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \\
\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{\frac{5}{3}+\sin x}{\frac{5}{4}+\sin x}\right)dx &= 2\pi\ln\left(\frac{\frac{5}{3}+\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1}}{\frac{5}{4}+\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}}\right) \\
&= 2\pi\ln\left(\frac{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\right) \\
&= 2\pi\ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right) dx &= \int_0^{2\pi} \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\frac{5}{3}+\sin x}{\frac{5}{4}+\sin x}\right)\right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{\frac{5}{3}+\sin x}{\frac{5}{4}+\sin x}\right)\right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{3}{4}\right) dx + \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{\frac{5}{3}+\sin x}{\frac{5}{4}+\sin x}\right) dx \\
&= 2\pi \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= 2\pi \ln\left(\frac{9}{8}\right)
\end{aligned}$$