เฉลยแบบฝึกหัดทบทวนก่อนสอบกลางภาค ชุดที่ 1 (P1)

www.atichart.com

① กำหนด $f(x) = \begin{cases} 4x-7, & x<2 \\ (2x-3)^2, & x \geq 2 \end{cases}$

1.1. จงหา $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

วิธีทำ
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\overbrace{(2(2+\Delta x)-3)^2}^{(1+2\Delta x)^2} - \overbrace{(2\cdot 2-3)^2}^{1}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cancel{1}+4\Delta x+4(\Delta x)^2 \cancel{-1}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} 4+4\Delta x = 4$$ #

1.2 จงหา $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

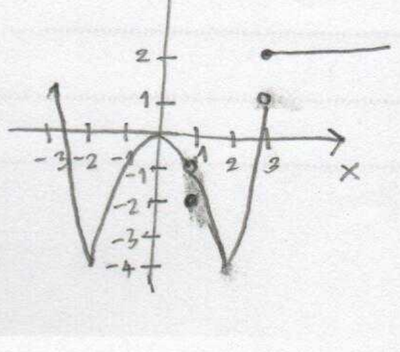
วิธีทำ
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\overbrace{(4(2+\Delta x)-7)}^{1+4\Delta x} - \overbrace{(4\cdot 2-7)}^{1}}{\Delta x}$$
$$= 4$$ #

1.3. $f'(2)$ หาค่าได้หรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าหาค่าได้ จงหาค่าของ $f'(2)$

$f'(2)$ หาค่าได้ เพราะ $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = 4$

และ $f'(2) = 4$ #

② จงพิจารณาจากกราฟของ $y=f(x)$ ต่อไปนี้



2.1) f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1, 3$

2.2) f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = -2, 1, 2, 3$

③ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $y = (x^3 + 9\sqrt[3]{x})(5+\sin x)$

วิธีทำ $y' = (x^3+9\sqrt[3]{x})\dfrac{d}{dx}(5+\sin x) + (5+\sin x)\dfrac{d}{dx}(x^3+9x^{\frac{1}{3}})$

$= (x^3+9\sqrt[3]{x})\cos x + (5+\sin x)(3x^2+3x^{-2/3})$ #

3.2 $y = (7+\arctan(7x))^7$

วิธีทำ $y' = 7(7+\arctan(7x))^6 \dfrac{d}{dx}(7+\arctan(7x))$

$= 7(7+\arctan(7x))^6 \times \dfrac{1}{1+(7x)^2} \times 7$

$= \dfrac{49(7+\arctan(7x))^6}{1+49x^2}$ #

3.3 $y = \dfrac{\tan(x+1)}{e^{2x}+\sec x}$

วิธีทำ $y' = \dfrac{(e^{2x}+\sec x)\frac{d}{dx}\tan(x+1) - \tan(x+1)\frac{d}{dx}(e^{2x}+\sec x)}{(e^{2x}+\sec x)^2}$

$= \dfrac{(e^{2x}+\sec x)\sec^2(x+1) - (\tan(x+1))(2e^{2x}+\sec x\tan x)}{(e^{2x}+\sec x)^2}$ #

3.4 $y = 6^{\cos^2 x}$

วิธีทำ $y' = 6^{\cos^2 x}\ln 6 \dfrac{d}{dx}\cos^2 x$

$= 6^{\cos^2 x}(\ln 6)(-2\cos x\sin x)$

$= -2\cos x\sin x(\ln 6)\cdot 6^{\cos^2 x}$ #

3.5 $y = 3\log_5(x^2+4)$

วิธีทำ $y' = 3\cdot\dfrac{1}{\ln 5}\cdot\dfrac{1}{x^2+4}\overbrace{\dfrac{d}{dx}(x^2+4)}^{2x}$ #

$= \dfrac{6x}{(\ln 5)(x^2+4)}$

④ ให้ $y = f(g(x))$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x โดยที่ $g(1)=3,\ g'(1)=-4$

และ $f'(3)=6$ จงหา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

วิธีทำ จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dx} = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = f'(g(1))\cdot g'(1)$$

$$= f'(3)\cdot(-4) = (6)(-4) = -24 \quad \#$$

⑤ กำหนดให้ $f(x) = (3x)^{20} + x^{19} + 1$ และ $g(x) = \dfrac{k}{x}$ จงหาค่า k ที่ทำให้

$f^{(20)}(1) = g^{(20)}(1)$

วิธีทำ

$$f'(x) = 20(3x)^{19}\cdot 3 + 19x^{18}$$

$$f''(x) = 20\cdot 19(3x)^{18}\cdot 3^2 + 19\cdot 18x^{17}$$

$$f'''(x) = 20\cdot 19\cdot 18(3x)^{17}\cdot 3^3 + 19\cdot 18\cdot 17x^{16}$$

$$f^{(19)}(x) = 20\cdot 19\cdot 18\cdots 2\,(3x)^1\cdot 3^{19} + 19\cdot 18\cdot 17\cdots 1$$

$$f^{(20)}(x) = 20\cdot 19\cdot 18\cdots 2\cdot 1\cdot 3^{20} = 20!\cdot 3^{20} \Rightarrow f^{(20)}(1) = 20!\cdot 3^{20}$$

$$g'(x) = k(-1)x^{-2}$$

$$g''(x) = k(-1)(-2)x^{-3}$$

$$g'''(x) = k(-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$\vdots$$

$$g^{(20)}(x) = k(-1)(-2)(-3)\cdots(-20)x^{-21} = k\cdot 20!\,x^{-21}$$

$$\Rightarrow g^{(20)}(1) = k\cdot 20!$$

จาก $f^{(20)}(1) = g^{(20)}(1)$

$$\cancel{20!}\cdot 3^{20} = k\cdot\cancel{20!}$$

$$\therefore k = 3^{20} \quad \#$$

⑥ กำหนด $y = \dfrac{\pi^{(x+e)}\sqrt{x^2+2}}{\ln x}$, $x > 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้สมบัติของลอการิทึมธรรมชาติ

วิธีทำ จะได้ $\ln|y| = \ln\left|\dfrac{\pi^{(x+e)}\sqrt{x^2+2}}{\ln x}\right|$

$$= \ln|\pi^{(x+e)}| + \ln(x^2+2)^{\frac{1}{2}} - \ln|\ln x|$$

$$= (x+e)\ln\pi + \frac{1}{2}\ln|x^2+2| - \ln|\ln x|$$

หาอนุพันธ์โดยปริยาย จะได้

$$\frac{d}{dx}\ln|y| = \ln\pi + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+2)} - \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln\pi + \frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{x\cdot\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi^{(x+e)}\sqrt{x^2+2}}{\ln x}\left[\ln\pi + \frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{x\cdot\ln x}\right] \quad \#$$

---

⑦ ให้ $s(t)$ เป็นระยะทางที่เครื่องบินวิ่งไปบนรันเวย์ก่อนจะบินขึ้น (หน่วยเป็นเมตร) และ t เป็นเวลา (หน่วยเป็นวินาที) กำหนดให้ $s(t) = \frac{10}{9}t^2$ สมมติว่า เครื่องบินจะขึ้นจากรันเวย์ได้เมื่อมันมีความเร็วเป็น $\frac{500}{9}$ เมตรต่อวินาที จงหาว่า เครื่องบินจะวิ่งอยู่บนรันเวย์ เป็นเวลานานเท่าใด และได้ระยะทางเท่าใด ก่อนจะบินขึ้น

วิธีทำ ความเร็วเครื่องบิน $v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \frac{20}{9}t$

จะหาเวลา t ที่ $v = \frac{500}{9}$ ม./วินาที

$$\frac{50\cancel{0}}{\cancel{9}} = \frac{2\cancel{0}}{\cancel{9}}t \Rightarrow t = 25 \text{ วินาที}$$

∴ เครื่องบินจะวิ่งอยู่บนรันเวย์ 25 วินาที

โดยระยะทางก่อนบินขึ้น คือ $s(t)\Big|_{t=25} = \frac{10}{9}(25)^2 = \frac{6250}{9}$

$= 694.44$ ม. #

⑧ จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของ $3xy^2+x^2y=x^2+3y^2$ ① ที่ $x=1$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ

$$3y^2+6xy\frac{dy}{dx}+2xy+x^2\frac{dy}{dx}=2x+6y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(6xy+x^2-6y\right)=2x-3y^2-2xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y^2-2xy}{6xy+x^2-6y}$$

เมื่อ $x=1$ แทนในสมการ ① จะได้

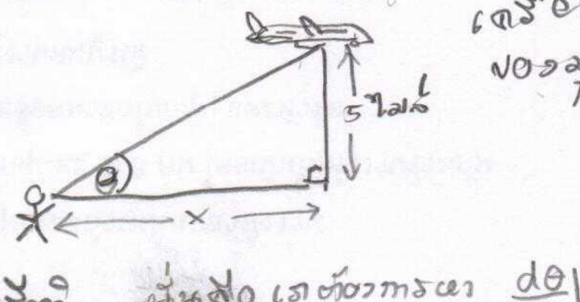
$$\cancel{3y^2}+y=1+\cancel{3y^2} \Rightarrow y=1$$

ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)}=\frac{\cancel{2(1)}-3(1)^2-\cancel{2(1)(1)}}{\cancel{6(1)(1)}+(1)^2-\cancel{6(1)}}=-3 \quad \#$$

---

⑨ ชายคนหนึ่งมองเห็นเครื่องบินลำหนึ่งบนท้องฟ้า โดยเครื่องบินบินในระดับสูงจากระดับสายตาที่ 5 ไมล์ ด้วยอัตราเร็วคงที่ 600 ไมล์/ชั่วโมง ให้ θ เป็นมุมที่ชายผู้นั้นมองดูเครื่องบินดังรูป จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของมุม θ เทียบกับเวลา ขณะที่มุม $\theta=30^\circ$



<u>วิธีทำ</u> สิ่งที่เราต้องการหา $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}\text{ เรเดียน}}$

ให้ x เป็นระยะทางจากผู้ชาย ถึงจุดบนพื้นดินที่ตรงกับเครื่องบินบนฟ้าดังรูป

จะได้ว่า $\frac{dx}{dt}=600$ ไมล์/ชม

จะได้ว่า $\tan\theta=\frac{5}{x}$ หรือ $\theta=\arctan\frac{5}{x}$

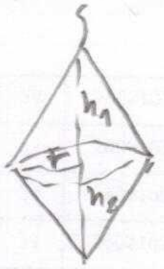
$$\frac{d}{dt}\tan\theta=\frac{d}{dt}\frac{5}{x}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{5}{x^2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{-3000\cos^2\theta}{x^2}$$

เมื่อ $\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$ จะได้ $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{5}{x} \Rightarrow x=5\sqrt{3}$

$$\therefore \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=\pi/6}=\frac{-3000\cos^2\pi/6}{(5\sqrt{3})^2}=\frac{-\overset{120}{\cancel{3000}}\left(\frac{3}{4}\right)}{\cdots}=-30 \text{ เรเดียน/ชม. } \#$$

(10) จากการวัดปริมาตรของลูกดิ่งที่ประกอบจากกรวยโลหะตัน สองรูปที่มีความสูงเป็น h_1 และ h_2 หน่วย และรัศมีร่วม r หน่วย ถ้า ในการวัดรัศมีของลูกดิ่งดังกล่าว มีค่าความผิดพลาดร้อยละที่เป็นไปได้ $\pm 0.5\%$ จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลในการประมาณค่าผิดพลาดร้อยละที่เป็นไปได้ในการคำนวณปริมาตรของลูกดิ่ง (ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}$ พท.ฐาน (สูง))



วิธีทำ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$

$= \frac{1}{3}\pi (h_1+h_2) r^2$

ค่าผิดพลาดจากการคำนวณปริมาตร คือ ΔV ประมาณค่าได้ด้วย dV โดย

$$dV = V'(r)\,dr = \frac{1}{3}\pi (h_1+h_2)(2r)\,dr$$

โดย $\frac{dr}{r} = \pm 0.5\%$ หรือ $\pm \frac{0.5}{100} \Rightarrow dr = \pm \frac{0.5r}{100}$

ดังนั้นค่าผิดพลาดร้อยละ คือ $\approx \frac{dV}{V} \times 100 = \dfrac{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{\pi}\cancel{(h_1+h_2)}\cancel{r}\left(\pm\frac{0.5 r}{100}\right)\times 100}{\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{\pi}\cancel{(h_1+h_2)}\cancel{r^2}}$

$= \pm 1$ #

---

(11) จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นในการหาค่าประมาณของ $\cos(\frac{3}{2})$ เมื่อกำหนดให้ $\pi \approx 3.14$

วิธีทำ ฟังก์ชันที่ใช้ประมาณค่า $\cos(\frac{3}{2})$ คือ $f(x) = \cos x$ เมื่อ $x_0 = 1.57$ และ $dx = -0.07$ สังเกตว่า $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2} = 1.57$

จะได้ว่า $f(x_0+dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx$

จาก $f'(x) = -\sin x$

$\cos(\frac{3}{2}) = \cos 1.5 = \cos(1.57-0.07) \approx \cos(1.57) - \sin(1.57)(-0.07)$

$\approx \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}(-0.07)$

$= 0 - 1(-0.07) = 0.07$

#

) วัตถุเคลื่อนที่บนแกน x โดย ณ เวลาที่ t ระยะทางจากจุดเริ่มต้นไปยังวัตถุ จะมีค่าเท่ากับ $s(t) = \ln(t+1)$ จงหาเวลาที่วัตถุมีความเร็วเท่ากับอัตราเร็วเฉลี่ย ในช่วง 2 วินาทีแรก

วิธีทำ อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วง 2 วินาทีแรก

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{\ln(3) - \overset{0}{\cancel{\ln(1)}}}{2} = \frac{\ln 3}{2}$$

จาก $v(t) = s'(t) = \frac{1}{t+1}$

พิจารณา $v(t) = \Delta v = \frac{\ln 3}{2}$

$$\frac{1}{t+1} = \frac{\ln 3}{2}$$

$$t = \frac{2}{\ln 3} - 1 \text{ วินาที}$$

$\therefore$ วัตถุที่เวลา $\frac{2}{\ln 3} - 1$ จะมีความเร็วเท่ากับอัตราเร็วเฉลี่ย 2 วินาทีแรก #

---

(15) กำหนดให้ $f(x) = (x^2-2x+3)^{1/3}$

15.1 จงหาค่าวิกฤตทั้งหมดของ f

วิธีทำ $f'(x) = \frac{1}{3(x^2-2x+3)^{2/3}} \frac{d}{dx}(x^2-2x+3) = \frac{\overbrace{2x-2}^{2(x-1)}}{3((x-1)^2+2)^{2/3}}$

ค่าวิกฤตเกิดที่ x ซึ่ง $f'(x)=0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

เนื่องจาก $3((x-1)^2+2)^{2/3} > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$

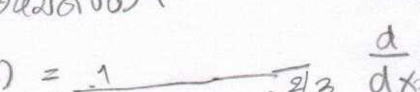
ดังนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

ทำให้ $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 1$

$\therefore x = 1$ เป็นค่าวิกฤตของ $f(x)$ #

15.2 จงหาช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

วิธีทำ จากการแทนค่า $x>1$ และ $x<1$ บนเส้นจำนวนจะได้



$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{3((x-1)^2+2)^{2/3}}$$

จะได้ว่า $(1, +\infty)$ เป็นช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

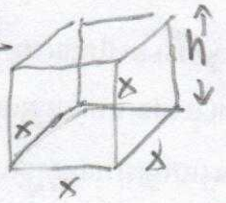
15.3 จงหาจุด x ทั้งหมดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์

15.4 จงหาค่า x " ———— " ต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ จากภาพด้านบนจะได้ว่าไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ จึงไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ แต่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ ซึ่งทำให้เกิดค่าต่ำสุด(สัมพัทธ์) #

(16) กล่องที่มีฐานรูป $\boxed{\square}$ กล่องหนึ่ง มีผลรวมของความสูงและความยาวเส้นรอบรูปขอบฐานกล่องเท่ากับ 90 นิ้ว อยากทราบว่ากล่องนี้จะมีปริมาตรมากที่สุดเท่าไหร่

<u>วิธีทำ</u>



ให้กล่องกว้างยาวด้านละ x นิ้ว และสูง h นิ้ว ดังรูป

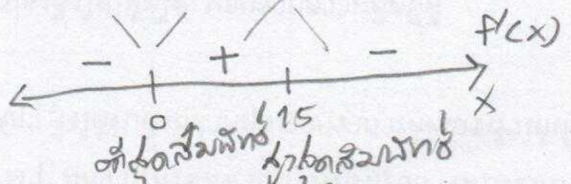
โจทย์กำหนดให้ $h+4x=90$

$\therefore h = 90-4x$

ให้ V เป็นปริมาตรของกล่อง หน่วยเป็น นิ้ว^3 จะได้

$$V = x^2h$$
$$= x^2(90-4x) = 90x^2-4x^3$$
$$\therefore \frac{dV}{dx} = 180x-12x^2 = 12x(15-x)$$

ค่าวิกฤตคือ x ที่ทำให้ $\frac{dV}{dx}=0$ นั่นคือ $x=0, 15$



V สูงสุดที่ $x=15$ นั่นคือ $h=90-4(15)=30$ นิ้ว

ดังนั้นปริมาตรสูงสุดเกิดที่ $x=15$ และ $h=30$

$$\therefore V = x^2h = 15^2\times 30 = 225(30) = 6{,}750 \quad \#$$

---

(17) กำหนด $f(x)=xe^x$

17.1 จงหาพหุนามเทเลอร์ดีกรี 3 $(P_3(x))$ ของ $f(x)$ รอบ $x=a$

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = xe^x \rightarrow f(a) = ae^a$$
$$f'(x) = xe^x+e^x = (x+1)e^x \rightarrow f'(a) = (a+1)e^a$$
$$f''(x) = xe^x+2e^x = (x+2)e^x \rightarrow f''(a) = (a+2)e^a$$
$$f'''(x) = xe^x+3e^x = (x+3)e^x \rightarrow f'''(a) = (a+3)e^a$$

$\therefore P_3(x)$ ของ $f(x)$ คือ

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$
$$= ae^a+(a+1)e^a(x-a)+\frac{(a+2)}{2}e^a(x-a)^2+\frac{(a+3)}{6}e^a(x-3)^3 \quad \#$$

17.2 ถ้าต้องการประมาณค่า $0.01e^{0.01}$ โดยใช้พหุนามจากข้อ 17.1 ให้ได้ค่าใกล้เคียงที่สุด ควรจะกระจายพหุนามรอบจุดใด

<u>ตอบ</u> $x=0$ เพราะ 0 มีค่าใกล้เคียงกับ 0.01 และเมื่อแทนค่าแล้วหาค่าได้ง่าย

\#

17.3 ຈົ່ງປະມານຄ່າຂອງ $0,01e^{0,01}$ ໂດຍໃຊ້ພະຫຸນາມຈາກຂໍ້ 17.1 ແລະ ຈຸດທີ່ເລືອກ ໃນຂໍ້ 17.2

ວິທີທຳ: $xe^{x} \approx P_3(x)$ ຮອບຈຸດ $x=0$

$$= 0\cdot e^0 + 1\cdot e^0(x-0) + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}e^0(x-0)^2 + \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}_{2}}e^0(x-0)^3$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2}$$

$$\therefore 0,01e^{0,01} \approx 0,01 + 0.01^2 + \frac{0,01^3}{2}$$

$$= 0.0101005 \qquad \#$$

---

(18) ຈົ່ງເຕີມຄຳຕອບຂອງລີມິດຕໍ່ໄປນີ້ ໃນກໍລະນີທີ່ລີມິດໃດບໍ່ໃຊ້ຈຳນວນຈິງ ໃຫ້ບອກວ່າລີມິດເປັນ $+\infty$ ຫຼື $-\infty$ ຫຼືເຫດຜົນອື່ນໆ

18.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{\sin x+4}$

ວິທີທຳ ເນື່ອງຈາກ $-1 \le \sin x \le 1$ ດັ່ງນັ້ນ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{\sin x+4} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{1+4} = +\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{\sin x+4} = +\infty \qquad \#$$

18.2 $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{7^x}{x}\right)$

ວິທີທຳ ໃຫ້ $I = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{7^x}{x}\right)$ ຈະເຫັນວ່າ ຢູ່ໃນຮູບອິນດີເທີມີເນດ $(-\infty)+(+\infty)$

ຈັດຮູບໃໝ່ໄດ້ $I = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{7^x \ln x}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1+\frac{7^x\ln x}{x}}{\ln x} \quad \left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)$ (*)

ເນື່ອງຈາກ $\left(\dfrac{7^x\ln x}{x}\right)' = \dfrac{x(7^x\ln x)' - 7^x(\ln x)(1)}{x^2} = \dfrac{x\left[\frac{7^x}{x} + (\ln x)7^x(\ln 7)\right] - 7^x\ln x}{x^2}$

$$= \frac{7^x + x(\ln 7)7^x(\ln x) - 7^x\ln x}{x^2} = \frac{7^x + 7^x(\ln x)\left[x(\ln 7) - 1\right]}{x^2}$$

จาก ⊛ โดยใช้กฎของโลปิตาล จะได้ $I = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\dfrac{1+7^x \ln x}{x}\right)'}{(\ln x)'}$

$$I = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{7^x + 7^x (\ln x)\left[x(\ln 7) - 1\right]}{x^2}}{}$$

$$\therefore\ I = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{7^x + 7^x (\ln x)\left[x(\ln 7) - 1\right]}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{7^x + 7^x (\ln x)\left[x(\ln 7) - 1\right]}{x} \qquad \left(\frac{+\infty}{0^+} = +\infty\right)$$

$$= +\infty$$ #

(ข้อนี้ รศ. ดาวน์ [illegible] ลองดูได้นะ)

---

(19) จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

19.1 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 5x + 1}$ $\quad \left(\frac{0}{0}\right)$

<u>วิธีที่ 1</u> $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 - x + 3)}{\cancel{(x-1)}(4x - 1)} = \frac{3}{3} = 1$ #

Note

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 3 \\ x - 1 & x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\ & \underline{\cancel{x^3} - x^2} \quad - \\ & -\cancel{x^2} + 4x \\ & \underline{-\cancel{x^2} + x} \quad - \\ & 3x - 3 \\ & \underline{3x - 3} \\ & 0 \end{array}$$

<u>วิธีที่ 2</u> ใช้กฎของโลปิตาล

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 2x^2 + 4x - 3)'}{(4x^2 - 5x + 1)'}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 4}{8x - 5}$$

$$= \frac{3}{3} = 1$$ #

19.2 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(-x\sin x + \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)}$ โดยใช้กฎของโลปิตาล

$= \lim\limits_{x \to 0} -\frac{\sin x}{3x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} -\frac{\cos x}{3}$ โดยใช้กฎของโลปิตาล

$= -\frac{1}{3}$ #

19.3 $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+1)^{\frac{1}{2x}}$ $(1^{+\infty})$

<u>วิธีทำ</u> $\ln (x^2+1)^{\frac{1}{2x}} = \frac{1}{2x} \ln (x^2+1)$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln (x^2+1)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln (x^2+1)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2+1} \times (\cancel{2}x)}{\cancel{2}}$ โดยกฎของโลปิตาล

$= 0$

ดังนั้น

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+1)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\ln (x^2+1)^{1/2x}}$

$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln (x^2+1)^{\frac{1}{2x}}}$

$= e^0 = 1$ #

ข้อแนะนำทั่วไป

1. หากพบคำเฉลยมีการคำนวณผิด หรือคิดส่วนที่ไม่ถูกต้อง ขอให้รีบติดต่ออาจารย์
2. ในการทำข้อสอบ ต้องแสดงวิธีทำดังตัวอย่างที่ทำให้ดู
3. บางคนทำแล้วได้คำตอบตรงกับอาจารย์ แต่หน่วยที่ใช้ และการเขียนแสดงวิธีทำสั้นไป ไม่ชัดเจน และผิดในบางขั้นตอน จึงให้อ่านเฉลยโดยละเอียด
4. เมื่อทำโจทย์หมดแล้ว เลือกสุ่มมาดูโจทย์ ควรบอกได้ว่าต้องทำอะไร เป็นอันดับแรก และอันดับต่อไป ถ้าทำไม่ได้ ให้ดูเฉลย แล้วกลับไปทำขั้นตอนเดิมใหม่
5. ในการทำข้อสอบข้อไหนดูยาก และเสียเวลามาก ให้เลือกทำตอนท้าย
6. อย่าลืมใส่ชุด นศ. มาทำสอบ ถ้าไม่ใส่อาจไม่ให้สอบ หรือหักคะแนนสอบกลางภาค